

IL RADAR

Situazione-problema sulle frazioni e i numeri decimali

Prima situazione: Indovina l'intero

Analisi a priori

Preconoscenze

I bambini sanno che c'è un collegamento fra la divisione e le frazioni cioè che la linea di frazione si può interpretare come segno di divisione fra il numeratore e il denominatore; conoscono anche i termini numeratore e denominatore; hanno fatto esperienze con le frazioni soprattutto in contesti geometrici e di misura ma limitandosi a frazioni con denominatori molto piccoli; conoscono il significato di multiplo e divisore

Misconcetti

Le frazioni devono essere parti più piccole di un intero

Non conoscenze

Terminologia (frazioni improprie e apparenti), caratteristiche di una frazione impropria (numeratore maggiore del denominatore ma non multiplo) e apparente (numeratore multiplo del denominatore)

Accertamento

Le attività svolte finora non hanno mai avuto come obiettivo centrale le frazioni; si è usato il linguaggio delle frazioni praticamente per definire aspetti legati ai numeri decimali quindi i bambini hanno familiarità solo con frazioni proprie decimali e non, ma del tipo $1/2$ $1/3$ $1/4$... $1/8$ $1/10$, non le usano molto al di fuori di questi contesti, alcuni hanno difficoltà a definire che cosa significa $1/5$ $1/6$ cioè ad andare oltre le più usate anche nel quotidiano (tipo $1/2$ $1/4$ $1/8$) o nella pratica scolastica; altri invece si sono già costruiti un concetto più evoluto, cioè sanno che $3/4$ significa "prendere un intero dividerlo in 4 parti uguali e prenderne 3", questa specie di "cantilena" è stata forzata da me in alcune situazioni perché altrimenti mancava loro un linguaggio adeguato per descrivere la situazione. Non ha costituito una rigidità nelle fasi successive perché è stato bypassato il fatto del partire dall'intero, il gioco si è svolto da qui in poi solo più sui numeri e sulle loro relazioni reciproche in una frazione. Il piano del discorso si è spostato da un "saper fare" (fare parti uguali e chiamarle un terzo, un quarto ecc.) ad un "sapere" (il significato di una frazione propria) per poi ritornare ad un "saper fare" (come costruire una frazione compresa fra due numeri interi).

Obiettivo dell'attività

Collocare una frazione nell'intervallo di interi che la contiene; scoprire le frazioni improprie e apparenti.

Descrizione dell'attività

Sul muro dell'aula c'è una linea dei numeri da 0 a 10, la distanza tra un numero e l'altro è di 1 metro.

I bambini si dividono in due squadre di 5/6 bambini, si sta lavorando a gruppi quindi è presente solo metà classe per volta; una squadra deve pensare e scrivere su un foglietto una frazione, l'altra squadra, facendo domande a cui si possa rispondere con un sì o con un no, deve indovinare fra quali numeri interi è compresa la frazione; i bambini hanno a disposizione una calcolatrice.

Le prime frazioni che inventano sono proprie e quindi si trovano tutte fra 0 e 1. Ma dopo poco tempo cominciano, usando la calcolatrice, a cercare numeratori e denominatori che divisi diano numeri decimali compresi negli altri intervalli, imparano anche la strategia dei multipli cioè si costruiscono un multiplo del denominatore e poi, per non ottenere il numero intero (erano esclusi dal gioco), aggiungono a caso una o due unità. Qualcuno prova anche con il denominatore. La calcolatrice diventa indispensabile, anche i bambini di livello più basso sono così coinvolti.

Sul foglietto che, terminato il gioco devono leggere a voce alta per dichiarare di quale frazione si trattava, devono scrivere anche il numero decimale.

Dopo alcune giocate il senso della frazione si è ormai ampliato.

Strategie

- Per scoprire il numero decimale corrispondente e quindi l'intervallo: basta prendere due numeri e dividerli, se il numero che si trova è ad esempio 3,... allora l'intervallo sarà 3-4;
- per inventare una frazione maggiore di 1: partire da un multiplo di un numero facendo la moltiplicazione con la calcolatrice e poi aggiungere o togliere una o più unità al numeratore o al denominatore, fare la divisione di numeratore e denominatore per verificare a che numero decimale si è arrivati e per tentativi ed errori giungere alla frazione che si trova nell'intervallo voluto o comunque in uno diverso da 0-1.

Nuove conoscenze

Facendo il gioco i bambini vengono a contatto con numeri che hanno molte cifre dopo la virgola, limitate però dalla capacità della calcolatrice a 8 o 10 cifre in tutto. Questo fatto si rivelerà importante nelle fasi successive. Al termine del gioco è stato anche sfatato il mito delle frazioni proprie e i bambini cominciano a ragionare sulle frazioni in termini di relazione fra due numeri interi qualsiasi.

Teoremi in atto

Si osserva questo "saper fare": partire da una frazione con numeri "facili" es. $\frac{3}{2}$ e farla diventare $\frac{15}{10}$ oppure $\frac{45}{30}$ moltiplicando numeratore e denominatore per lo stesso numero.

Conoscenze in ZSP

Concetto di frazioni equivalenti: bambini diversi arrivano allo stesso numero intero partendo da numeratori e denominatori differenti e collegano questo fatto al concetto di multiplo.

Istituzionalizzazione

In un momento di attività collettiva vengono riprese le regole e le strategie usate nel gioco e si costruiscono sulla linea dei numeri, nel tratto fino a 1, le suddivisioni in 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 parti; i bambini notano come le parti diventino sempre più piccole e quindi più si ingrandisce il denominatore più la parte rimpicciolisce. Si scoprono alcune frazioni equivalenti all'interno dell'intervallo 0-1: $1/2$, $2/4$, $3/6$, $4/8$... e poi tutte quelle delle frazioni apparenti; si formano tre insiemi (chiamati da noi "pentoloni") di frazioni proprie, improprie apparenti cercando di definire le loro caratteristiche; i bambini individuano subito quella del numeratore multiplo (frazioni apparenti) oppure maggiore ma non multiplo del denominatore (frazioni improprie). Viene data anche la terminologia corretta.

Esercizi

Esecuzione di una scheda che riporta un "tappetino" con le suddivisioni dell'unità in 2, 4, 8 parti messe in parallelo in modo da poter confrontare quanti quarti ci sono in $1/2$, quanti ottavi in un quarto e così via; i bambini devono confrontare frazioni usando i segni $> < =$, fare addizioni e sottrazioni di frazioni usando il tappetino per ragionare.

Seconda situazione: Il radar - 1° puntata

Regole del gioco

Bisogna trovare due frazioni che stiano una a destra e una a sinistra della frazione data dall'insegnante: vince chi riesce a racchiuderla con il "fascio radar" più stretto; si gioca tutti insieme ma si possono formare dei piccoli gruppi per fare le giocate; si può usare la calcolatrice

Osservazione sul grado di coinvolgimento

Mentre all'inizio alcuni tentano la via "solitaria", dopo alcune giocate tutti si rendono conto che, se si lavora in gruppo, si trovano più in fretta nuove frazioni da giocare; da un lato influisce il fatto che ci sono più calcolatrici a disposizione e quindi si possono fare più prove contemporaneamente seguendo le strategie spontanee, dall'altro qualcuno si rende conto che se si ha una strategia si giunge più in fretta al risultato e quindi è meglio appoggiarsi a qualcuno che la strategia se la sia già costruita: si impara per imitazione dei compagni più capaci.

Analisi a priori

Preconoscenze

Le strategie e le conoscenze acquisite con il gioco precedente diventano subito patrimonio comune grazie ai bambini leader; alle strategie spontanee si aggiungono quelle veicolate dalle prime conoscenze istituzionalizzate e le abilità acquisite con gli esercizi.

Obiettivo dell'attività

Scoprire la densità della retta numerica; inventare regole per passare da un numero decimale alla frazione e viceversa

Descrizione dell'attività

La frazione che chiedo di racchiudere col fascio radar è $14/4$. Traccio alla lavagna una linea e in mezzo ci metto la frazione $14/4$. Man mano che i bambini parlano inserisco le frazioni con i loro numeri decimali attaccati nel posto che mi viene indicato. Comincia Mattia.

MATTIA: $26/8$ $30/8$ perché visto che $1/4$ è il doppio di $1/8$ ho fatto così: se faceva $28/8$ era uguale a $14/4$, devo fare un numero più piccolo e uno più grande. Allora ho calcolato come fosse $13/4$ e ho fatto il doppio cioè $26/8$, poi ho fatto la stessa cosa per $15/4$ e l'ho raddoppiato e fa $30/8$

FRANCESCA: sì, perché $14:4$ fa $3,5$, $26:8$ viene $3,25$, poi ho fatto $30:8$ e fa $3,75$

ANDREA M. e ENZO: $27/8$, perché il doppio di 14 è 28 e il doppio di 4 è 8 e veniva $28/8$ solo che è uguale a $14/4$ e allora abbiamo fatto $27/8$ ($3,375$ è più vicino a sinistra di $3,25$ dato da $26/8$)

passaggio dal gioco con i decimi a quello con i centesimi e da quello con i centesimi a quello con i millesimi grazie alla calcolatrice; insieme alla frazione i giocatori devono subito dichiarare il numero decimale perché altrimenti gli altri non sanno se la giocata va bene o no; tutti i bambini che partecipano attivamente si devono costruire strategie per confrontare i numeri per sapere se hanno vinto; si costituiscono subito coppie di bambini che giocano insieme

VALENTINA T.: $27,5$ ottavi e $28,5$ ottavi

INSEGNANTE: le frazioni sono fatte solo da numeri interi

ANDREA B.:(va per tentativi scrivendo numeri a caso sulla calcolatrice)
 $44:12=3,6666666... 44/12$

VOCE: è dopo $29/8$ (cioè $3,625$)

MATTIA ed ENRICO: $41,5$ dodicesimi (ripeto che non si può con i decimali al numeratore) ... $46/13$ ($3,538$) a destra $44/13$ ($3,384$) a sinistra

LORENZO e PAOLA: abbiamo contato $42/12$ (è equivalente a $14/4$ e si ottiene moltiplicando sopra e sotto per 3) e quindi giochiamo $41/12$ ($3,4166...$) a sinistra e $43/13$ ($3,583333...$) a destra

i bambini scoprono molti numeri periodici che occupano tutto il display perché hanno tante cifre decimali e l'ultima sembra ripetersi all'infinito

INSEGNANTE (raccolgo gli echi della classe): allarga il fascio, eravamo già arrivati a destra a $3,538$ con $46/13$

DIEGO e ALESSANDRO: $40/12$ ($3,333333...$) $44/14$ ($3,142$)

MAURIZIO: $45/14$ $43,2142857$

INSEGNANTE: allarga

ANDREA M. ed ENZO: $45/13$ ($3,4615384$)

KATIA: sono d'accordo con Andrea ed Enzo per la sinistra, a destra c'è $113/32$ ($3,53125$) (è stato ottenuto partendo da $14/4$ e moltiplicando per 2 più volte come verrà esplicitato più avanti)

ANDREA B. e MATTIA: (fanno una serie di giocate ma senza controllare con la linea dei numeri sulla lavagna e con le giocate già fatte per cui perdono il filo del gioco, alla fine delle giocate li invito a controllare e calcoliamo insieme i numeri decimali verificando alla lavagna sulla linea dei numeri se il fascio si allarga o si restringe) $51/12$ (4,25) $50/14$ (3,5) $48/14$ (3,42) $51/11$ (4,6)

KATIA: a sinistra $115/34$ (3,3823529)

INSEGNANTE: allarga

FABIO: $45/16$ (2,8125) (controlla da solo e ritira la giocata)

DIEGO, LORENZO, ALESSANDRO: $46/13$

INSEGNANTE: già giocato ... di che cosa vi accorgete andando avanti nel gioco?

ENRICO: è molto difficile trovare un numero più vicino, bisogna ragionare, non giocare a caso

MAURIZIO: per avvicinarsi il numero deve diventare più grande o più piccolo?

LORENZO: per i numeri a sinistra deve diventare più grande, per quello a destra più piccolo

ANDREA B.: ho provato sulla calcolatrice $60:90$ e viene $0,666666\dots$, se tu fai dei numeri grandi ti escono dei numeri piccoli e viceversa

INSEGNANTE: ma allora, provate a pensare, qual è il numero decimale più vicino a 3,5?

ENRICO: non basta più ragionare sui decimi, dobbiamo ragionare sui centesimi, sui millesimi ecc.

ANDREA M.: $3,49999999\dots$

ricominciano le prove con la calcolatrice

GRAZIA: $115/33$ (3,4848484)

ENRICO: $3.499.999.999/1.000.000.000=3,499999999$

FRANCESCA: non vale, sono avvantaggiati perché hanno la calcolatrice con 10 cifre

LAURA: a destra $35.111.111/10.000.000=3,5111111$

FRANCESCA: $35.000.001/10.000.000=3,5000001$

ENRICO: $3.500.000.001/1.000.000.000=3,500000001$

il gioco finisce per mancanza di ... cifre sulle calcolatrici

MATTIA: (rivendica la paternità del metodo di Enrico) io avevo capito il trucco dei milionesimi ma mi ero limitato ai millesimi, $3499/1000$, lui mi ha guardato e l'ha fatto con i miliardesimi.

ENRICO: più ci sono cifre, più si riduce il numero

VOCE: ci vorrebbe un calcolatore con infinite cifre

ENZO: quello della NASA

INSEGNANTE: ma allora noi battiamo il calcolatore perché possiamo pensare a numeri con sempre più cifre dopo la virgola ... allora proviamo un po' a dire che cosa abbiamo imparato facendo questo gioco

MAURIZIO: dalla parte sinistra per avvicinarci di più il numero deve diventare sempre più grande e viceversa da destra

CRISTEL: bisogna ragionarci sopra invece di sparare

ANDREA B.: come ha detto Cristel, prima sparavo a caso, adesso ragiono

INSEGNANTE: sapete dire come avete ragionato?

FRANCESCA: per ragionare sono partita da quello di Mattia, sono partita da un'altra frazione aumentando e diminuendo il numero sopra e sotto; se Mattia non fosse intervenuto per la prima volta io per prima cosa avrei sparato a caso e poi avrei ragionato su altre frazioni

KASSANDRA: (giocava con Katia) eravamo partite da $28/8$ e poi abbiamo fatto il doppio di 28 e poi il doppio di 56 ... lo stesso anche sotto e poi abbiamo fatto 113

KATIA: 112 non era abbastanza, abbiamo aumentato di uno, abbiamo pensato anche noi il $45/13$ come Marchisio

MATTIA: ancora adesso non so se ho capito bene le frazioni anche se ho scoperto tutte queste cose ho capito che non bisogna subito dividere, penso se lo posso risolvere senza calcolatrice; non penso mai a un numero decimale, per scoprire $14/4$ quanto è ho fatto 4 - 8 - 12 - 16 (la tabellina del denominatore) e ho cercato

INSEGNANTE: ti vuoi dire che bisogna capire dove si trova sulla linea dei numeri

MATTIA: sì ... per la mia giocata mi sono ricordato della scheda che avevamo fatto ieri (quella con il tappetino) e ho pensato subito agli ottavi perché erano più piccoli dei quarti.

Terza situazione: Il radar - 2° puntata

Teoremi in atto

I bambini sono consapevoli che stiamo lavorando con strutture moltiplicative quindi inventano strategie coerenti con le regole implicite che secondo loro posseggono queste strutture

Obiettivo dell'attività: vedi gioco precedente

Descrizione dell'attività

Sono passate più di due settimane dal gioco precedente. I bambini subito non ricordano più la strategia di Enrico e Mattia.

INSEGNANTE: oggi faremo un nuovo gioco del radar in cui invece di partire da una frazione, partiremo da un numero decimale e voi dovrete trovare il fascio radar ma usando solo frazioni con il denominatore 7: il numero decimale è 2,351 (traccio una linea alla lavagna, faccio una tacca in mezzo e sopra ci scrivo 2,351)

Immaginate ora tante botteghe da cui potete prelevare le vostre frazioni ma ogni bottega vende solo frazioni con lo stesso denominatore, cioè abbiamo la bottega dei settimi, degli ottavi, dei decimi, dei venticinquesimi e così via, oggi giochiamo con la bottega dei settimi.

ENRICO: $14/7$ fa 2, ho fatto la tabellina del 7 (gli fanno eco Fabio e Maurizio)

FABIO: il numero sopra il 7 doveva essere più grande

ELISA: $16/7=2,285$, dopo $17/7=2,428$

MAURIZIO: il gioco è finito

ALESSANDRO: no, $15/7=2,142$... no, ho allargato

FABIO e MAURIZIO: (Maurizio si fa coinvolgere da Fabio anche se ha già intuito che il gioco è finito prima) $18/7=2,571$

VOCI: se non si può mettere un numero decimale sopra è finito il gioco, quindi sono $16/7$ e $17/7$

ELISA: io ho provato anche con i sesti: $14/6=2,3333333...$ e $15/6=2,5$

Si fanno alcune considerazioni sul fatto che così si allarga il fascio perché i sesti sono più grandi dei settimi, intanto Kassandra continua a fare delle prove...

KASSANDRA: i numeri più vicini sono $2,350$ e $2,352$

INSEGNANTE: e le frazioni quali sono?

ENRICO: $2,375=19/8$

KASSANDRA: $23.520.000/10.000.000$

INSEGNANTE: si può trovare una frazione con i numeri più piccoli che sia equivalente a questa?

VOCI: si possono togliere tutti gli zeri fino a 2352 sopra e sotto

ELISA: fai il doppio di 7 e poi aggiungi qualche numero

KASSANDRA: $235/100$ moltiplichi per 2 e fa $470/200$ poi togli uno zero e trovi $47/20$

ENRICO: $2,35=94/40$

INSEGNANTE: non ci sono frazioni con i numeri più piccoli equivalenti a $47/20$? ne esiste una con i numeri più piccoli?

CRISTEL: 47 è dispari, se lo dividi viene sempre un numero con la virgola

INSEGNANTE: tu dici che il 47 va diviso per qualcosa

ENRICO: se moltiplico per 0,... viene più piccolo

ELISA: 47: fa 2,4 (si accorge di non aver capito)

ENRICO: il 47 bisogna moltiplicarlo o dividerlo? a moltiplicarlo per 0,... viene un numero con la virgola, forse bisogna dividere...

MAURIZIO: $35:15=2,1875$ (sta sparando frazioni a caso perché non ha capito il problema)

INSEGNANTE: esiste un numero che divida esattamente il 47?

LUANA: non esiste nelle tabelline

INSEGNANTE: allora com'è questo numero?

LUANA: ah ... è un numero primo ...

INSEGNANTE: già, Cristel aveva avuto l'intuizione che era un numero particolare ma non bastava dire che era dispari, non vi ricordavate più dei numeri primi: guardate là, sul cartellone del crivello di Eratostene...

A questo punto faccio una digressione per far riflettere sulle strategie seguite per scoprire $47/20$ e parlare di frazioni ridotte ai minimi termini

INSEGNANTE: Proviamo ora a giocare con 3,75: sarà meglio giocare con i quarti o con i quinti?

TUTTI: con i quinti

ENRICO: perché si divide di più

LUANA: io penso alle fettine di torta che diventano sempre più piccole

ELISA: prima con gli ottavi venivano numeri più piccoli

KASSANDRA: $2/4$ è 0,5, se continui con i quarti arrivi a 3,75?

ALESSANDRO: ho trovato 3: con $15:5$, $15/5$

CRISTEL: $15/4=3,75$

ELISA: $18/5=3,6$ $19/5=3,8$

KASSANDRA: (usa la sua strategia) $37.400.000/10.000.000$, tolgo gli zeri e divido per 2, viene $187/50$

Viene bypassata la scelta fra quarti e quinti, perché i quarti giungono esattamente a 3,75 ma il fascio radar rimane più grande a meno che non si usino quarti e quinti insieme.

ELISA: $37.400.001/10.000.000=3,7400001$ si avvicina di più

CRISTEL: $37.400.009/10.000.000=3,7400009$ si avvicina ancora di più

VOCE: manca 1 per arrivare 3,7400010 che è più vicino

ENRICO: 3,7499999 si avvicina di più

KASSANDRA: $3749/1000$

... e il gioco continua.....

Analisi a posteriori

Nuove conoscenze

Riduzione di una frazione ai minimi termini, forzata dal mio intervento; relazione fra numeri primi e frazioni.